Homología persistente

Malors Espinosa Lara

CIMAT

18 de enero de 2015

Plan de la exposición

1. Homología.
2. Filtraciones.
3. Homología persistente.
4. Números de Betti Persistentes.
5. Diagramas de persistencia.
6. Ejemplo sencillo.

La idea de la homología

La homología permite entender las distintas clases de agujeros de un objeto.

Clases de agujeros

- Los agujeros de dimensión uno son los que puedo detectar con lazos atrapados alrededor de cilindors.
- Los agujeros de dimensión dos son los que puedo detectar con burbujas alrededor de esferas huecas.

La idea de la homología

El mapa frontera

1. Detectar un agujero de dimensión n es poner un $(n+1)$-simplejo hueco a su alrededor y no poder llenarlo.
2. Quizá puedo hacerlo de distintas maneras: Necesito una manera de decidir si dos agujeros detectados son realmente el mismo.
3. El mapa frontera ∂ arregla eso.

La idea de la homología

Mapa frontera

Dado un simplejo Δ de dimensión n su frontera $\partial(\Delta)$ es la suma de sus caras de dimensión $n-1$.

Cualidades de ∂

1. La frontera ∂ ignora embones entre caras y sólo considera las caras que están en el borde.
2. Si la frontera es cero es porque el simplejo encerraba un espacio dentro.

La idea de la homología

La homología

La homología captura cuántos simplejos esencialmente distintos tienen frontera cero, por lo que encierran una región, pero que no son frontera de otro simplejo, por lo que de hecho encierran un agujero.

Construcción la homología

Complejo simplicial

Un complejo simplicial es un objeto formado a partir de puntos, segmentos, triángulos, tetraedros,... de tal forma que cualesquiera dos de ellos se intersecten en una cara de ambos.

Cadenas

Al espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$ generado por todos los simplejos de dimensión n lo llamamos el grupo de cadenas n-dimensionales C_n.

Construcción de la homología

Grupo de homología

Definimos el n-ésimo grupo de homología de X como

$$H_n(X) = \frac{\ker \partial}{Im(\partial)},$$

y su dimensión como espacio vectorial lo llamámos el n-ésimo número de Betti.

Construcción de la homología

Logros de la homología:

1. Captura la distinta cantidad de agujeros que un objeto puede tener y lo codifica en un objeto algebraico.
2. Es una construcción invariante bajo homotopía.

Filtraciones

Filtraciones

Una filtración de un espacio topológico X es una sucesión de subespacios

$$\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = X.$$

Tiempo

Puede pensarse que la filtración muestra cómo nace y se desarrolla el objeto hasta conventirse en X.

Complejos simpliciales

Filtraciones simpliciales

Si X es un complejo simplicial supondremos que la filtración cumple que:

1. Cada K_i es un subcomplejo simplicial de X;

Agrupando toda la homología

Agrupando homología

1. Cada nivel de la filtración tiene su propia homología.
2. Las inclusiones $\iota_{i,j} : K_i \to K_j$ relacionan las homologías de los distintos niveles

$$(\iota_{i,j})_* : H_n(K_i) \to H_n(K_j).$$

Homología de nivel p

Nivel p

Para cada posible dimensión p tenemos la sucesión

$$(H_p)_*(K_0) \to (H_p)_*(K_1) \to \ldots \to (H_p)_*(K_{m-1}) \to (H_p)_*(K_m),$$

relacionando los agujeros de dimensión p que se presentan en cada nivel.

Nacimiento y muerte

Podemos pensar que esta sucesión nos permite ver como nacen y mueren los agujeros de nivel p de X.

Grupos de Homología Persistente

Grupos de Homología Persistente

Definimos el i,j-ésimo grupo de homología persistente de nivel p como

$$H_{p,i,j} = Im(\iota_{i,j}),$$

donde $\iota_{i,j} : H_p(K_i) \to H_p(K_j)$ es el mapa inducido por la inclusión.

Homología persistente

Nuevos agujeros

El grupo de homología persistente *mide* cuántos agujeros de nivel p son antiguos en el momento j de la filtración y provienen de al menos alguien en el momento i.

Persistencia de los ciclos

Nacimiento y muerte

1. Decimos que una clase γ de nivel p nace en el tiempo i si $\gamma \notin H_{i-1,i}(X)$.
2. Decimos que una clase γ de nivel p, que nace en el tiempo i, muere en el tiempo $j > i$ si existe una clase β que nace en tiempo $k < i$ con

$$\iota_{k,j}(\beta) = \iota_{i,j}(\alpha),$$

donde $\iota_{a,b} : K_a \to K_b$ es la inclusión inducida por la filtración.

Regla de antiguedad

Regla de antiguedad

Cuando dos clases se unen, la clase que persiste es la más antigua.

De manera dramática

La regla de antiguedad dice: El grande mata al jóven.

Persistencia

Persistencia de una clase

Decimos que una clase γ que nace en el nivel i y muere en el nivel j tiene persistencia

$$Pers(\gamma) = j - i.$$

Si γ nunca muere decimos que $Pers(\gamma) = \infty$.

Números de Betti persistentes

Números de Betti persitentes

A la dimensión como espacio vectorial de $H_{p,i,j}(X)$ se le conoce como el k- ésimo número de Betti persistente de nivel k y se le denota por $\beta_{p,i,j}$.

La multiplicidad $\mu_{i,j}^p$

Multiplicidad de generación i, j.

- A las clases de nivel p que nacen en el momento i y mueren en el momento j las llamamos la generación de i a j.
- A la cantidad de clases en la generación de i a j de nivel p lo denotamos por $\mu_{i,j}^p$ y lo llamamos la multiplicidad de la generación de i a j.

Observación importante

Relación entre $\mu_{i,j}$ y $\beta_{i,j}$

Observa que

$$\mu_{i,j} = (\beta_{i,j-1} - \beta_{i,j}) - (\beta_{i-1,j-1} - \beta_{i-1,j}).$$

Objetivos

Metas inmediatas

1. Entender la evolución de los ciclos de cada nivel, es decir, entender los números de Betti persistentes, o bien, las multiplicidades de las generaciones.
2. Codficar esta información en un objeto al cual yo pueda estudiar de alguna manera apropiada.
3. Poder calcular la homología persistente de manera efectiva.

Contexto: Nacimiento y muerte

Nacimiento y muerte

Sea $\gamma \in H_p(K_i)$.

1. Decimos que γ nace en K_i si $\gamma \notin H_{p,i}(X)$.
2. Decimos que γ muere en K_j si existe una clase β que nace antes que γ y tal que $\iota_{i,j}(\beta) = \iota_{l,j}(\gamma)$ y que esto no ocurra para ningún momento antes que j.

Contexto: Multiplicidad de una generación

Multiplicidad de una generación

1. A las de clases que nacen en i y mueren en j las llamamos la generación de i a j.
2. A la cantidad de clases de la generación de i a j linealmente independientes se le dice la multiplicidad de la generación de i a j.

Contexto: Objetivos a entender

Objetivo

Codificar y entender de manera concisa los números de Betti persistentes y las multiplicidades de las generaciones y además tener una manera efectiva de calcularlos.

Requisitos razonables

Requisitos razonables

Sea X un complejo simplicial de dimensión m con una filtración asociada.

1. Se podrá construir un diagrama de persistencia de nivel $0 \leq p \leq m$.
2. Del diagrama deben poderse leer:
   - La persistencia de las distintas clases,
   - Las multiplicidades de las generaciones,
   - Los números de Betti persistentes.
3. Que puedas extraer información que de *alguna* manera sea invariante, i.e. que dependa lo menos posible de la filtración.

Construcción

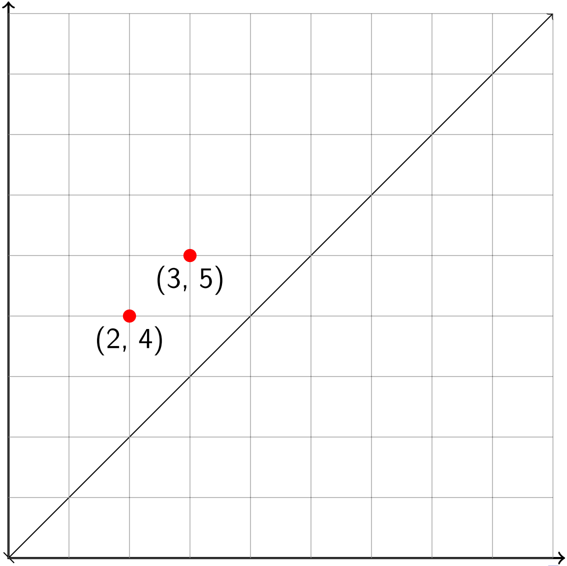
Construcción

Sea X un complejo simplicial de dimensión m con una filtración asociada.

1. Fijar un nivel $0 \leq p \leq m$.
2. Calcular cuáles generaciones de i a j no son vacías.
3. Para cada una de ellas calcular su multiplicidad de $\mu_{i,j}^{p}$.
4. Marcar los puntos $(i,j) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ y ponerle un $\mu_{i,j}^{p}$ para indicar su multiplicidad.

El objeto obtenido se le conoce como diagrama de persistencia de nivel p y se le denota por $Diag_p(\mathfrak{F})$ donde $\mathfrak{F}$ es la filtración asociada.

Ejemplo concreto: $Diag_1(f)$.

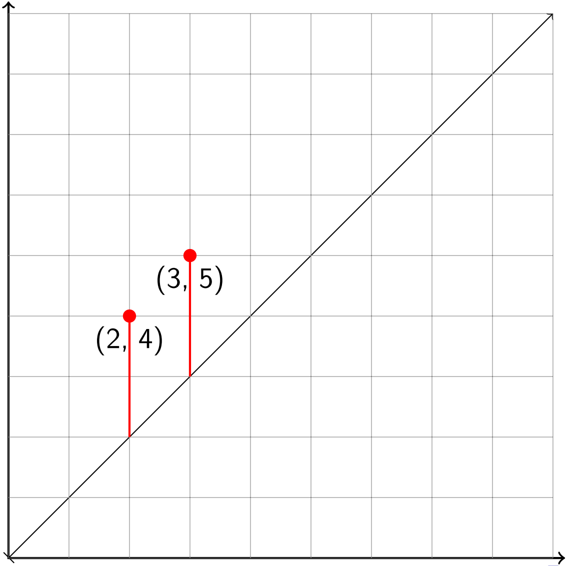


La persistencia de las clases

Leyendo la persistencia

- Toda clase γ que nace en i y muere en j está representada por un punto en el lugar (i, j).
- Su persistencia es $Pers(\gamma) = j - i$, que es justo la distacia vertical a la diagonal.

La persistencia de las clases



Los números de Betti persistentes

EL cuadrante importante

β_p, i, j es el número de puntos, contados con multiplicidad, en el cuadrante superior izquierdo con esquina (i, j) cerrado verticalmente y abierto horizontalmente.

El complejo

El complejo

Consiste de los siguientes simplejos:

1. 7 vértices: a, b, c, d, e, f, g.
2. 12 segmentos: $ab, bc, ca, ad, bd, cd, de, dg, df, ef, eg, fg$.
3. 8 triángulos: $abc, abd, bcd, acd, efg, egd, fgd, efd$.
4. 1 tetraedro: $defg$.

La filtración

La filtración

- X_0 : agrega $a, b, c,$
- X_1 : agrega $d, e, f,$
- X_2 : agrega $ab, bc, ca, ef, eg, fg,$
- X_3 : agrega $d,$
- X_4 : agrega $ed, dg, ad, dc, ab, bc,$
- X_5 : agrega $fd, bd,$
- X_6 : agrega $abc, abd, bcd, acd,$
- X_7 : agrega $def, deg, dfg, efg,$
- X_8 : agrega $defg.$

La filtración

Nuestra meta:

Calcular diagramas de persistencia de X asociadas a esta filtración.

La filtración

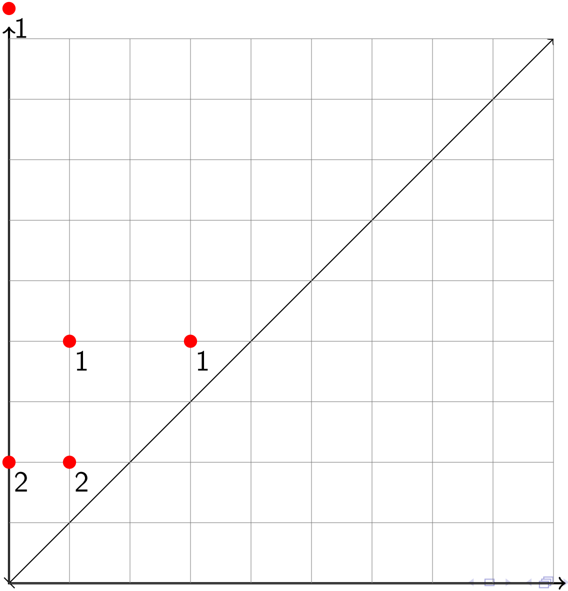
Nuestra meta:

Calcular diagramas de persistencia de X asociadas a esta filtración.

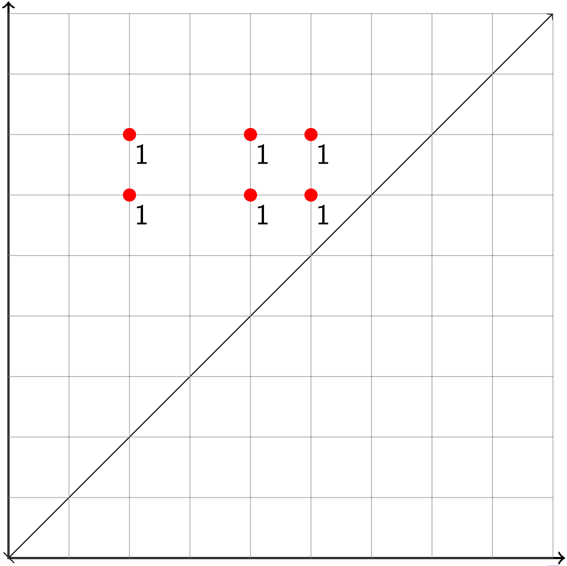
Ánimo

No tenemos miedo.

El nivel 0.



El nivel 1



El nivel 2